称重原理的物理解析

周祖濂 中国计量科学研究院

【摘要】四支点称重系统的数理分析，指出通常我们用来计算四支点称重衡器的力矩平衡方程，是理想状态下的数学模型。用于实际情况时，必须经过修正后才能使力矩平衡方程接近理想方程。四支点称重系统是静不定系统，用它得到的三组方程，不可能求解。对这样系统的物理原理和计算的力和力矩平衡方程的错误认识，是我们在实际运用中造成错误和混乱的根本原因。

【关键词】四支点理想系统、理想的数学模型、静不定系统、修正

前言

我曾为此写过一些文章，通过纠正对称重原理的错误认识，力图消除由此造成的对衡器分度数、偏载误差等诸多有争议和认识上的混乱。

对一个事物基本原理的数理解析，是对该事物认识的基础。应当始终强调基础研究的重要性，然而，人们往往忽视事物最基本的原理，而用“直观”、“传统”的观点代替事物的本质。而且形成的固有观念是很难被改变的，这些错误一方面是由“先入为主”的思想习惯造成的，另一方面有利益驱使上的故意。

一、问题的提出

凡是调试过汽车衡的人，都会发现这样一个问题，在绝大多数情况下，四只传感器在加载时测量值之和与实际加载（砝码）值之间有明显的超过该衡器最大允许误差的现象。而且这种差值既可以大于实际加载值，也可以小于实际加载值。由于我们讨论的系统是几何不变体的稳定平均系统，此时承载的四只传感器是可靠的安装在基础上的，它的示值是真实施加于基础上的压力。而现在的现象是施加于基础（地面）的力，与加载在传感器上的力（砝码的重量）不相等。这种额外增加或减少的力是何种原因造成的？是不是违背了静态物理平衡原理？

下面对此问题进行深入的分析，即通过对它的数理解析来阐明称重的基本原理。

二、静态称重

衡器静态称重是称重原理最基本的形式，绝大多数的称重方式，包括动态称重的原理都以此为基础

。

静态称重是指确定在保持静止的稳定平衡状态物体的重量值。物体的稳定度实质上是包含有“平衡”内涵。

平衡（equilibrium）的定义：

（一）稳定平衡：系统受力造成轻微偏移，当作用力消失后，系统能恢复到它的初始状态的平衡位置。

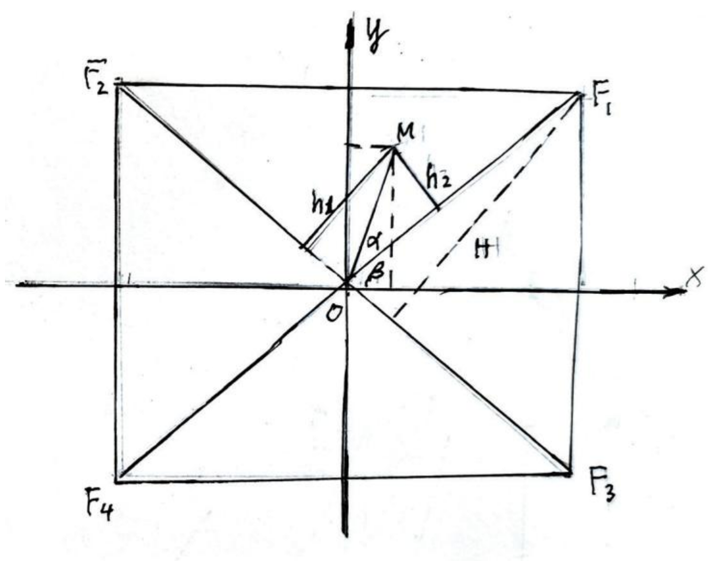
（二）随遇平衡：系统能在所处的任何位置，始终处于平衡状态。

（三）不稳定平衡：系统受力使其有轻微的偏移，即使外力消除后，系统也不再能保持和恢复其初始状态。

静平衡的必要且充分的条件是：∑（诸力）=0，和∑（诸力矩）=0

即系统处于静平衡状态时，作用于系统的所有外力和力矩之和相互抵消（合力为零），系统（物体）保持静止状态。

本文主要讨论四支承点的重力作用下的称重系统。首先考虑理想状态的四支承点衡器，其所谓理想状态是指承载器的四个支承点处于理想矩形的四个顶角上。测力传感器灵敏度完全一致。受力点在一个



理想的平面上。

图 1

图 1 中 M 为加载荷坐标（x，y），M 质量与 x 轴的夹角为 α，对角线与 x 轴的夹角为 β，矩形

L l

L L

的边长分别为 2 和2 则:

$$\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\sin\beta=\frac{}{\sqrt{l^2+L^2}};\cos\beta=\frac{}{\sqrt{l^2+L^2}}$$

$$H=2l\cos\beta$$

四个受力点，F_1、F_2、F_3 和 F_4 到对应对角线的垂线距离均相等为 H:

对于理想的矩形结构，可以存在两种形式的力矩平衡状态。第一种为我们普遍的对 x 轴或 y 轴的求得的力矩平衡方程:

$$\begin{cases}2lF_1-2lF_2=(l-y)M\\2lF_3\qquad\quad=(l-y)M\\\quad+2lF_4\end{cases}\text{和}\begin{cases}2lF_1-2lF_2=(l-\mathrm{x})M\\2lF_3\qquad\quad=(l-x)M\\\quad+2lF_4\end{cases}$$

上两式相加都得到以下结果:

$F_1+F_2+F_3+F_4=M$

Y 方向相减可得到重心在 y 方向的位置:

$y/l=[(F_1+F_2)-(F_3+F_4)]/M$

第二种力矩平衡，两个对角线写出以下力矩平衡方程（参看图 1，并注意力矩正负方向）

$$-h_1M=$$

$$\begin{cases}HF_2\qquad\qquad-HF_3\\HF_1-h_2M=-HF_4\end{cases}\text{或}\begin{cases}H(\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_3)=h_1M\\H(\mathrm{F}_2+\mathrm{F}_4)=h_2M\end{cases}$$

由图可得:

$$h_1=\sqrt{x_2+y_2}\sin(\alpha-\beta)$$
$$h_2=\sqrt{x_2+y_2}\sin(\alpha-\beta)$$

和 H=2lcosβ

将上两式相加可得:

$$H=2l\cos\beta(F_1+F_2+F_3+F_4)=\sqrt{x_2+y_2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]\cdot M$$

由于$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$,代入上式可得:

$$2l(F_1+F_2+F_3+F_4)=2\sqrt{x_2+y_2}\sin\alpha\cdot M$$

再因$l/\sqrt{x_2+y_2}=\sin\alpha$,最后可得$F_1+F_2+F_3+F_4=M$

表面上看上面两种力矩平衡状态，都可满足∑（诸力)=0，和∑（诸力矩)=0 的条件，但也可看出在两种状态下的力和力矩平衡的方程只有三个:

$$\begin{Bmatrix} 2lF_1+2lF_2=(l+y)M \\ 2lF_3+2lF_4=(l-y)M \end{Bmatrix}$$

$$F_1+F_2+F_3+F_4=M$$

而四支点的称重系统有四个未知数，所以不管由上述何种状态得到的方程都不能求解，即无法得到 F_1、F_2、F_3 和 F_4 的准确值。

这样的系统称为静不定系统。反之，静定系统的支承的反力可由该系统的静力平衡方程完全确定。

三、四支承点称重系统的数学模型

在实际中，上述的理想状态是不存在的。首先，承载器的四个受力传感器的位置，不可能构成理想

的矩型。第二，受力点也不可能在一个理想的平面上，即使在力臂相等情况下，传感器的受力也会不同。再考虑到传感器和承载器是非刚性的，这由对角线分析力矩受力的情况就可以看出，只要对角线高低位置有变化，对应两个顶角的力矩平衡就不相同，所以实际上的四支点称重系统除了有三个方程，及四个未知数无法求解外，还要考虑几何、物理等因素。因此实际状态下测得的传感器受力的值总和，不可能用上述理想方程来解释。因此加载值往往不等于四个传感器受力的合力值。静不定问题的求解应结合静力方程，变形协调方程（几何方程）和物理方程等三个方面之间的

关系求得，但这在实际操作中往往存在困难。

因此我们通常使用计算四支点衡器的称重结果，是根据理想的力矩平衡方程。在理想状态下称重数学模型，与实际情况间存在差异，对于一台实际的衡器，必须通过实测的数据进行修正后，才能使得修正后的测量数据，得到的修正称重数学模型计算出“正确”的结果。

一台称重准确的衡器，必须满足的要求是：称重结果准确（在给定误差范围内）和无论被称物置于承载器任何位置时，称重结果均不超过允许误差。所以对达不到此要求的衡器，必须事先经过调偏（修正）和量值校准后方能使用。

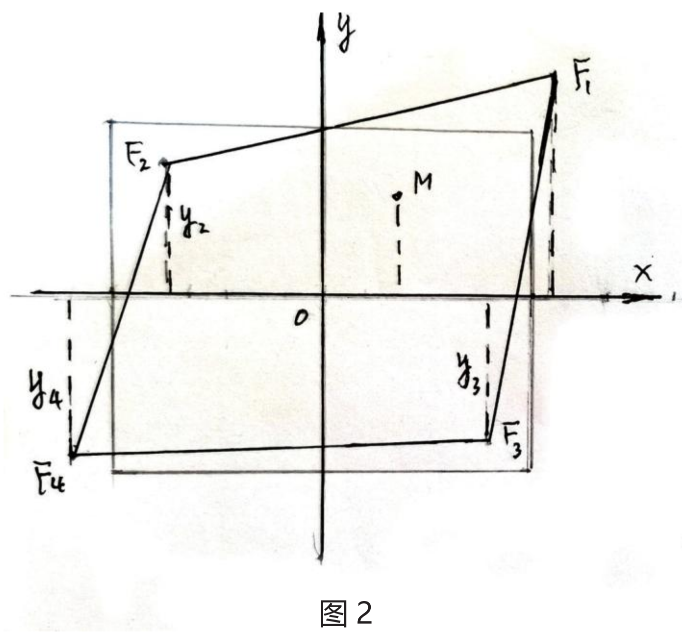


图 2

现在我们讨论实际称重系统，与理想数字模型间的差异（图 2）

四个受力点的坐标分别为 $F_1(x_1,y_1)$、$F_2(x_2,y_2)$、$F_3(x_3,y_3)$ 和，$F_4(x_4,y_4)$，载荷 M 的坐标为（x, y）。

F_1、F_2、F_3 和 F_4 是在加载后，该称重系统显示的受力点的作用力。它们与理想数学模型的差异是由于我们设定的模型为理想的矩形，矩形的四顶角上的作用力为实际系统四个受力点的力，两者间差异是明显的。

若把不等力臂系统设为等力臂系统，以及由于实际四个受力点并不在同一平面上，所以他们之间“力矩平衡”不能满足理论上的力矩平衡方程。例如，上面讨论的对角线为平衡轴的情况时，四个支点高差变化，四个点的受力也必然变化，受力在变化前后的分配不同。

为了保持一个称重系统测量结果的准确性、可靠性和稳定性，必须是一个几何不变体的稳定平衡系统，即此时系统是处于平衡状态。加矩平衡方程如下：

$$\begin{Bmatrix} F_{11}+F_{21}+F_{31}+F_{41}=M_1 \\ F_{12}+F_{22}+F_{32}+F_{42}=M_2 \\ F_{13}+F_{23}+F_{33}+F_{43}=M_3 \\ F_{14}+F_{24}+F_{34}+F_{44}=M_4 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

而数学模型的力矩平衡方程如下：

$$\begin{Bmatrix} 2lF_1+2lF_2=(l+y')M \\ 2lF_3+2lF_4=(l-y')M \end{Bmatrix} \tag{2}$$

比较上述二方程，可以看出两者间求得的载荷值和“重心”y' 值与真实结果不等（$M \neq M_i$， $y \neq y'$）。

实际情况只有在准确知道受力点坐标值时，才能通过测得的力值计算得到载荷的数值。用力矩平衡方程，直接将测得的力值相加就可得载荷的“真值”。这也就是把造成未经调偏的衡器力值的测量结果相加，误以为就是载荷值的错误观念形成的根源。

由未加修正数学模型的力矩平衡方程计算得到的“载荷重心位置”，并不等于载荷的真实坐标值（x，y），因此 $y \neq y'$。

结论是必须用衡器初始测量值对理想的力矩平衡方程进行修正，使得修正后的力值，能够满足数学模型的数学平衡方程。

四、对实际测量值的修正

根据初始测量值（F_1、F_2、F_3 和 F_4），修正的方式有两种，一是根据∑（诸力矩）=0 的原则：测量

值加修正系数可使得模型方程的静力平衡方程成立:

$$\begin{cases} K_1F_{11}+K_2F_{21}+K_3F_{31}+K_4F_{41}=M \\ K_1F_{12}+K_2F_{22}+K_3F_{32}+K_4F_{42}=M \\ K_1F_{13}+K_2F_{23}+K_3F_{33}+K_4F_{43}=M \\ K_1F_{14}+K_2F_{24}+K_3F_{34}+K_4F_{44}=M \end{cases}$$

求解上联立方程可求出修正值 K。该系统经修正后，显示值均在实际测量值上乘以 K_i，则以上方程变为:

$$\begin{cases} F'_{11}+F'_{21}+F'_{31}+F'_{41}=M \\ F'_{12}+F'_{22}+F'_{32}+F'_{42}=M \\ F'_{13}+F'_{23}+F'_{33}+F'_{43}=M \\ F'_{14}+F'_{24}+F'_{34}+F'_{44}=M \end{cases}$$

其中，$F'i_j = K_iF_{ij}$

由于我们讨论的系统是几何不变体稳定平衡系统，所以修正系数K 在整个测量时期内是不变的。首先用修正后的静力平衡方程之联立解，求修正系数，具体情况由下例说明:

角号	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	力值和
1	44900	18370	19900	4650	87821
2	22940	41790	−570	23540	87702
3	22840	260	40820	24240	88160
4	4080	18390	18450	47030	87950

在求解时，力值之和 M_1、M_2、M_3 和 M_4 均用载荷砝码值代入求解。若载荷值为未知数，可由

M_i 的平均值代替 $M_0=(M_1+M_2+M_3+M_4)/4=87908$ 代替。$M_1=87821$，$M_2=87702$，$M_3=88160$，$M_4=87950$

求解得到的修正值为： $K_1=1.0089$，$K_2=0.9971$，$K_3=0.9859$，K =1.0050

修正后的结果如下:

$$\overline{\sum}=87908.0$$

角号	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	力值	修正值
1	45299.6	18314.9	19619.4	4673.3	87907.2	1.0089
2	23144.2	41668.8	−562.0	23657.7	87908.7	0.9971
3	23043.3	259.2	40244.4	24361.2	87908.1	0.9856
4	4116.3	18336.7	18189.4	47265.2	87908.1	1.0050

此时的力值和的平均值

使用理想模型力矩平衡方程时，在 y 方向四个支点的力臂应相等，均为l。因此，此时四个力矩方程考虑到修正值时，应改写为：

$$\left\{\begin{aligned} F_1+F_2=\frac{k_1+k_2}{4}(1+y/l)M \\ F_3+F_4=\frac{k_3+k_4}{4}(1-y/l)M \end{aligned}\right\}$$

$$k_i=\frac{1}{K_i}$$

此式与上述数学模型的力矩平衡方程完全等效。且 ，将上式相加和相减就可求出载荷的量值和载荷实际坐标值 y，

$$F_1+F_2+F_3+F_4=(k_1+k_2+k_3+k_4)/4\cdot M+[(k_1+k_2)-(k_3+k_4)]/4\cdot y/lM$$

此时重心值 y 相对于设定 e 值的相对值为：

$$\frac{y}{e}=\frac{(F_1+F_2)-(F_3+F_4)}{(k_1+k_2+k_3+k_4)-M4}-\frac{(k_1+k_2)-(k_3+k_4)}{k_1+k_2+k_3+k_4}$$

欲用上等式求出 k_i 值是不可能的，因为上面已讲过，四支点的称重系统是静不定系统。它的力矩平衡方程只有三个，而未知数有四个。

然而，它的物理意义要比静力平衡方程明显。$k_1+k_2+k_3+k_4\neq 4$ 说明在四个受力点力矩不相等的情况下，四个力值之和不等于载荷值 M。另外，由理想的力矩平衡方程，用未经修正的力值测得载荷重心坐标，也不等于载荷真实的坐标 y。所以实际的力矩平衡与理想模型力矩平衡之间的差异，在于后者的“平衡”条件不是载荷真实重心的力矩平衡，所以理想模型的“力矩”，实际上并不平衡， 两者之间存在差值。因此用来修正前的力值，按力臂相等的理想模拟方程计算的结果是错误的，必须对系统进行修正，方能得到正确的结果。

我们可由静力平衡方程求得修正系统，并得出力矩平衡方程的修正系数：

$k_1=1/k_1=1/1.0089=0.991179$ $k_2=1/k_2=1/0.9971=1.002908$ $k_3=1/k_3=1/0.9859=1.014302$

$k_4=1/k_4=1/1.0050=0.995025$ $k_1+k_2+k_3+k_4=4.00341$

$(k_1+k_2)-(k_3+k_4)=1.994087-2.009327$

$=-0.015342/4=-0.003835$

这些数据看出，在调节时只要载荷（砝码）放置的位置比较一致，由求 $F_1+F_2+F_3+F_4$ 式中，第二项 $[(k_1+k_2)-(k_3+k_4)]/4 \cdot y/\ lM$ 的数值，不仅比第一项小很多 $(k_1+k_2+k_3+k_4)/4 \cdot M$，而且彼此相加时能正、

负相互抵消，所以 M_i 用平均值，替代砝码的实际值 M 的误差很小。

用 M_i 的平均值代入上面求重心的等式，求出的重心的数值，可信度很高。

$$(F_1+F_2)-(F_3+F_4)=[(k_1+k_2)-(k_3+k_4)]/4\cdot M+(k_1+k_2+k_3+k_4)/4\cdot y/lM$$

有兴趣的读者可以根据实测数据，求得 k 值后验证。

五、称重系统的机械结构与传感器

我们主要讨论应变式传感器作为测力单元的电子秤。从机械结构看，衡器可分为带有杠杆连接的形式和直接加载形式的两大类。常见的非自动秤大体包括：称重桥（Weighbridge）如汽车行和轨道衡，单个和多个以及联合在一起的组合秤、平台秤、地秤、斗秤、吊挂式有轨秤、以及起重秤等。所用的传感器包括：压式、拉式、梁式和双端梁式。

通常秤的机械系统受温度、蠕变等的影响都明显的小于对传感器特性的影响。早先我们设计电子秤时，主要根据厂家给出的传感器的技术指标，或由厂家、样本上给出的数据。当批量生产时， 还要进行一些相关试验，才能保证批量生产的产品性能。

自从非自动衡器和传感器的 R76 和 R60 国际建议公布后，衡器批量生产的产品质量保证就显得比较简单。一般来说，只要先确定传感器的级别和分度数，与使用的衡器的级别和分度数相一致， 就可批量匹配使用。

例如：Ⅲ级秤 没 n=3000，可直接选用 C3（n_{LC}=3000）的传感器。电子秤的误差包括：

·非线性 + 滞后 + 静态（温度）试验。（根据传感器国际建议和国外资料的说明）

·总的合成误差不得超过所要求的最大允许误差（包含在分段阶梯误差限）。

·一般要求所使用传感器的分配因子 p_{LC}=0.7。

·上述误差，不包括蠕变和零点的静态试验。（根据传感器国际建议和国外资料的说明）

·传感器最大量程通常根据下式确定：

E_{max} ≥ （MAX_{max}+DL+IZSR+NUD+T^+）/N

其中：N 传感器的数目。DL= 死（静）载荷；IZSR= 初始零点的设计范围；NUD= 非均匀分布载荷（Non-uniform Distributed Load）；T^+= 皮重。

·$n_{LC}=E_{\max}/v$：传感器检定分度数。

· $n=Max/e$：电子秤检定分度数

衡器的机械结构包括力值传递装置、限位器等，都是为了保证能将被称的重量，准确地传递到传感器上，传感器是整个称重系统的第一级仪表，它的精度决定了称重系统的精度（除非有其它修正和补偿措施）。所以通常说“传感器是电子秤的心脏”。

我已写过文章阐明：对使用单只传感器的电子秤，最大允许误差不可能大于传感器（p_{LC}=0.7） 最大允许误差。对于四只传感器的电子秤，从理想上讲，考虑到随机现象，衡器的最大允许误差是传感器（四只）的随机误差的平方根值，即为四支传感器随机误差之和的一半。所以四支传感器的衡器使用C3 级传感器，只要设计得当，可设计出 n=4000，甚至精度更高一些的衡器。

衡器（特别是贸易用的衡器）是属于法制管理的计量器具，必须通过型式批准才可投产，通过检定才能使用。然而大型衡器，如汽车衡、轨道衡等，对完整的衡器进行静态温度试验就很不现实。这往往让用户和厂家有意或无意将现场能显示的最小分度值，或最大分度数，认作是该衡器的实际检定分度值。因此在实际使用时，由于环境温度的变化，使其实际的测量误差在冬夏之间产生的变化， 远远超过所规定的最大允许误差。这种错误和混乱的认识的出现，与用户和厂家的认知缺失和故意有关。

六、结论

通常使用的将传感器所受力值，直接相加求衡器被称物的重量的方法，是建立在默认承衡器的四个受力点的“力臂”的力矩平衡方程条件下的算法。这种条件实际上是根据理想的四支承点的衡器建立的数学模型。理想四支点衡器是指当称重平台为理想的矩形时，传感器处于四角的顶点，且受力点均处于理想的平面上。

实际情况下，称重平台不可能满足上述条件。由于现场平台的四边形的四个边长不等，则四个受力点的力臂不等，且受力点也不会处于理想的平面上，此时若将实际测得的力值，代入理想衡器的数学模型，在此数值条件下等式不能成立。只有我们准确知道四个受力点的坐标位置时，力矩平衡方程等式才成立。所以在实际情况下，只有根据测量数据对理想的力矩数学模型进行修正，使其满足实际衡器的力矩平衡条件。

一台衡器的准确度取决于我们根据实测数据修正后的力矩平衡方程接近理想的四支点衡器数学模型的程度。

对于用应变传感器的电子衡器，传感器是作为衡器测量的一次仪表。它的特性和技术指标，决定衡器的精度或不确定度。实际上单只传感器的衡器的最大误差，不可能超过所使用传感器的最大允许误差。四只传感器的衡器如果设计恰当，其最终的最大允许误差可以小于所使用传感器的最大允许误差。

力矩平衡原理的衡器，偏载调节的误差，实际上也决定了衡器误差。

对于无砝码校准，有些方法实际是用测量偏载的“力平衡”，替代了衡器的力矩平衡。

衡器使用的准确度，还取决于环境的条件。大多数情况下，室外使用时的温度范围远远超过OIML

R60 对传感器常规的检定温度范围。再考虑到风力、被称物密度的差异（浮力）等的影响，

特别是在户外，即使精度很高的衡器，要得到高精度的称量结果也是很困难的。

说明：1、随机误差之和等于误差值的平均值之和的方根值，而不是算术平均值。

2、为了提高求 K 值的精度，在测量时，显示器的示值调至能显示最大数值，使之具有最高的分辨率，K 是无量刚的量，无物理单位，所以与测量值的单位无关。